

BEISPIELE DER IN PISA 2012 VERWENDETEN MATHEMATIKAUFGABEN

■ Abbildung I.2.55 ■

DIE RADFAHRERIN HEIKE

Heike hat gerade ein neues Fahrrad bekommen. Es hat einen Tachometer, der am Lenker befestigt ist.

Der Tachometer kann Heike die zurückgelegte Strecke und ihre Durchschnittsgeschwindigkeit für eine Tour anzeigen.



In dieser Testeinheit geht es um mit dem Fahrrad zurückgelegte Strecken. Auf Grund der Rahmengeschichte über eine einzelne Person ist die Testeinheit der Kontextkategorie *Persönlich* zuzuordnen. Bei leichten Veränderungen des Kontexts der Testeinheit ließen sich die einzelnen Aufgaben auch der Kategorie *Berufsbezogen* bzw. *Wissenschaftsbezogen* zuordnen. Die Ausgestaltung der Kategorien zielt darauf ab, mit den verschiedenen Kontextsituationen ein möglichst breites Spektrum von Schülerinnen und Schülern anzusprechen, und sie bilden zugleich eine Art Checkliste, um sicherzustellen, dass die Aufgaben verschiedene Lebensbereiche widerspiegeln. Es handelt sich nicht um Berichtskategorien. Da es bei dieser Testeinheit um Zusammenhänge zwischen Strecke, Zeit und Geschwindigkeit geht, sind die Aufgaben der Inhaltskategorie *Veränderung und funktionale Abhängigkeiten* zuzuordnen.

DIE RADFAHRERIN HEIKE – FRAGE 1

Auf einer Tour ist Heike 4 km in den ersten 10 Minuten gefahren und dann 2 km in den nächsten 5 Minuten. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

- A. Heikes Durchschnittsgeschwindigkeit war in den ersten 10 Minuten höher als in den nächsten 5 Minuten.
- B. Heikes Durchschnittsgeschwindigkeit war in den ersten 10 Minuten und in den nächsten 5 Minuten die gleiche.
- C. Heikes Durchschnittsgeschwindigkeit war in den ersten 10 Minuten niedriger als in den nächsten 5 Minuten.
- D. Es ist nicht möglich, anhand der Angaben etwas über Heikes Durchschnittsgeschwindigkeit zu sagen.

Bewertung

Beschreibung: Vergleich von Durchschnittsgeschwindigkeiten, Streckenangaben und Zeitangaben

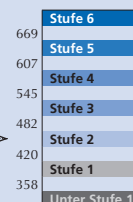
Mathematischer Inhaltsbereich: Veränderung und funktionale Abhängigkeiten

Kontext: Persönlich

Prozess: Anwenden

Aufgabentyp: Einfache Multiple-Choice-Aufgabe

Schwierigkeitsgrad: 440,5 ■



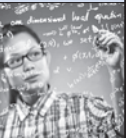
Volle Punktzahl

- B. Heikes Durchschnittsgeschwindigkeit war in den ersten 10 Minuten und den nächsten 5 Minuten die gleiche.

Keine Punkte

Andere Antworten.

Keine Antwort.



Kommentar

Zur Beantwortung der ersten Frage, einer einfachen Multiple-Choice-Aufgabe, müssen die Geschwindigkeiten auf zwei zurückgelegten Strecken verglichen werden, zum einen 4 km in 10 Minuten und zum anderen 2 km in 5 Minuten. Die Frage wurde in die Prozesskategorie Anwenden eingestuft, da sie das präzise mathematische Verständnis voraussetzt, dass eine Geschwindigkeitsangabe eine Verhältniszahl ist und die Proportionalität den Schlüssel zur Lösung der Aufgabe liefert. Dazu müssen die Doppelwerte in der Aufgabe (2 km – 4 km; 5 Minuten – 10 Minuten) erkannt werden, was das einfachste Konzept der Proportionalität darstellt. Schülerinnen und Schüler, die diese auf Kompetenzstufe 2 angesiedelte Frage beantworten können, stellen daher unter Beweis, dass sie über ein grundlegendes Verständnis des Konzepts der Geschwindigkeit und der Proportionalrechnung verfügen. Stehen Strecke und Zeit im selben Verhältnis, ist die Geschwindigkeit identisch. Natürlich könnten die Schülerinnen und Schüler das Problem auch auf komplizierterem Weg korrekt lösen (indem sie beispielsweise berechnen, dass beide Strecken mit einer Geschwindigkeit von 24 km/h zurückgelegt werden), was aber nicht erforderlich ist. Die PISA-Ergebnisse zu dieser Frage enthalten keine Informationen zum eingeschlagenen Lösungsweg. Die richtige Antwortoption ist B (Heikes Durchschnittsgeschwindigkeit war in den ersten 10 Minuten und in den nächsten 5 Minuten die gleiche).

DIE RADFAHRERIN HEIKE – FRAGE 2

Heike ist 6 km zum Haus ihrer Tante gefahren. Ihr Tachometer hat für die gesamte Tour durchschnittlich 18 km/h angezeigt.

E. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

F. Heike hat 20 Minuten gebraucht, um zum Haus ihrer Tante zu kommen.

G. Heike hat 30 Minuten gebraucht, um zum Haus ihrer Tante zu kommen.

H. Heike hat 3 Stunden gebraucht, um zum Haus ihrer Tante zu kommen.

I. Es ist nicht möglich zu sagen, wie lange Heike gebraucht hat, um zum Haus ihrer Tante zu kommen.

Bewertung

Beschreibung: Berechnung der Fahrtdauer ausgehend von Durchschnittsgeschwindigkeit und zurückgelegter Strecke

Mathematischer Inhaltsbereich: Veränderung und funktionale Abhängigkeiten

Kontext: Persönlich

Prozess: Anwenden

Aufgabentyp: Einfache Multiple-Choice-Aufgabe

Schwierigkeitsgrad: 510,6

669	Stufe 6
607	Stufe 5
545	Stufe 4
482	Stufe 3
420	Stufe 2
358	Stufe 1
	Unter Stufe 1

Volle Punktzahl

A. Helen hat 20 Minuten gebraucht, um zum Haus der Tante zu kommen.

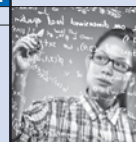
Keine Punkte

Andere Antworten.

Keine Antwort.

Kommentar

Die zweite Frage entspricht Kompetenzstufe 3. Auch diese Frage wurde der Prozesskategorie Anwenden zugeordnet und kann – ausgehend vom Verständnis der Bedeutung der Geschwindigkeit – durch einfaches proportionales Denken gelöst werden: In einer Stunde wurden 18 Kilometer zurückgelegt. Bei einer dreimal kürzeren Strecke dauert die Fahrt folglich ein Drittel einer Stunde, d.h. 20 Minuten (daher lautet die richtige Antwort A: Heike hat 20 Minuten gebraucht, um zum Haus ihrer Tante zu kommen). Angaben zum jeweiligen Prozentsatz der Schüler, die die verschiedenen Multiple-Choice-Antworten ankreuzten, stehen für künftige Untersuchungen über die öffentlich zugänglichen Datenbanken zur Verfügung.



DIE RADFAHRERIN HEIKE – FRAGE 3

Heike ist mit ihrem Fahrrad von zuhause zum Fluss gefahren, der 4 km entfernt ist. Dafür hat sie 9 Minuten gebraucht. Nach Hause ist sie auf einer kürzeren Strecke von 3 km gefahren. Dafür hat sie nur 6 Minuten gebraucht.

Wie groß war Heikes Durchschnittsgeschwindigkeit in km/h auf der Tour zum Fluss und wieder zurück?

Durchschnittsgeschwindigkeit für die Tour:km/h

Bewertung

Beschreibung: Berechnung der Durchschnittsgeschwindigkeit während zweier Fahrten anhand von zwei Strecken- und zwei Zeitangaben

Mathematischer Inhaltsbereich: Veränderung und funktionale Abhängigkeiten

Kontext: Persönlich

Prozess: Anwenden

Aufgabentyp: Aufgabe mit offenem Antwortformat (manuelle Kodierung)

Schwierigkeitsgrad: 696,6

669	Stufe 6
607	Stufe 5
545	Stufe 4
482	Stufe 3
420	Stufe 2
358	Stufe 1
	Unter Stufe 1

Volle Punktzahl

28

Keine Punkte

Andere Antworten.

28,3 [Falsche Methode: Durchschnitt der Geschwindigkeiten beider Fahrten (26,67 und 30)].

Keine Antwort.

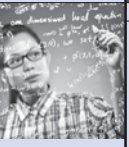
Kommentar

Die dritte Frage setzt ein tieferes Verständnis der Bedeutung des Begriffs Durchschnittsgeschwindigkeit sowie des Zusammenhangs zwischen der Gesamtzeit und der insgesamt zurückgelegten Strecke voraus. Die Durchschnittsgeschwindigkeit kann nicht einfach ermittelt werden, indem der Durchschnitt der Geschwindigkeiten gebildet wird, wenngleich in diesem spezifischen Fall die falsche Antwort (28,3 km/h), die aus der Ermittlung des Durchschnitts der Geschwindigkeiten resultiert ($26,67 \text{ km/h} + 30 \text{ km/h}$), nicht stark von der korrekten Antwort (28 km/h) abweicht. Die Lösung dieser Aufgabe setzt ein mathematisches wie auch an den realen Kontext geknüpft Verständnis dieses Phänomens voraus, so dass sie hohe Anforderungen in Bezug auf die grundlegenden mathematischen Fähigkeiten Mathematisieren, Reflektieren und Argumentieren sowie Umgang mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik stellt.

Schülerinnen und Schüler, die wissen, wie sie ausgehend von der Gesamtzeit ($9 + 6 = 15$) und der Gesamtstrecke ($4 + 3 = 7$) weiter vorgehen müssen, können die Antwort entweder einfach durch proportionales Denken (7 km in einer Viertelstunde macht 28 km in einer Stunde) oder durch Anwendung komplizierterer Formeln (z.B. $\text{Strecke}/\text{Zeit} = 7/(15/60) = 420/15 = 28$) erhalten. Diese Aufgabe wurde der Prozesskategorie Anwenden zugeordnet, da davon ausgegangen wurde, dass die Hauptschwierigkeit in der mathematischen Definition der Durchschnittsgeschwindigkeit und u.U. der Umrechnung der Maßeinheiten liegt, insbesondere für Schülerinnen und Schüler, die das Ergebnis mit Hilfe von Formeln für Geschwindigkeit/Strecke/Zeit errechnen. Sie zählt zu den schwierigeren Aufgaben des Aufgabekatalogs und ist auf Stufe 6 der Kompetenzskala angesiedelt.

Allgemeiner Kommentar zu dieser Testeinheit

Einen Hinweis auf den zunehmenden Schwierigkeitsgrad der drei Aufgaben dieser Testeinheit gibt die Untersuchung der zur Lösung dieser drei Aufgaben anzuwendenden Strategien. In der ersten Frage müssen zwei Verhältnisangaben miteinander verglichen werden. In der zweiten Frage muss ausgehend von Geschwindigkeit und Strecke die Zeit ermittelt werden, wobei eine Maßeinheit umzurechnen ist. Bei der dritten Frage müssen die vier Zeit- bzw. Streckenangaben auf eine Art und Weise kombiniert werden, die Schüler oftmals als wenig eingängig empfinden. Anstatt die Angaben zu Strecke und Zeit für jede Fahrt zu kombinieren, müssen sie beide Strecken und beide Zeiten addieren, woraus sich eine neue Strecke und eine neue Zeit und damit die Durchschnittsgeschwindigkeit ergibt. Bei der elegantesten Lösung ist die eigentlich durchzuführende Berechnung einfach, in der Praxis führen die Schülerinnen und Schüler indessen oftmals kompliziertere Berechnungen durch.



■ Abbildung I.2.56 ■

BERGSTEIGEN AM MOUNT FUJI**BERGSTEIGEN AM MOUNT FUJI**

Der Mount Fuji ist ein berühmter
schlafender Vulkan in Japan.

BERGSTEIGEN AM MOUNT FUJI – FRAGE 1

Der Mount Fuji ist für die Öffentlichkeit jedes Jahr nur vom 1. Juli bis 27. August zur Besteigung freigegeben. Ungefähr 200.000 Menschen besteigen den Mount Fuji während dieser Zeit.

Wie viele Menschen besteigen den Mount Fuji durchschnittlich pro Tag?

- A. 340
- B. 710
- C. 3 400
- D. 7 100
- E. 7 400

Bewertung

Beschreibung: Identifizierung eines durchschnittlichen Tageswerts anhand einer Gesamtzahl und eines konkreten Zeitraums (mit Datenangaben)

Mathematischer Inhaltsbereich: Quantitatives Denken

Kontext: Gesellschaftsbezogen

Prozess: Formulieren

Aufgabentyp: Einfache Multiple-Choice-Aufgabe

Schwierigkeitsgrad: 464 ■

669	Stufe 6
607	Stufe 5
545	Stufe 4
482	Stufe 3
420	Stufe 2
358	Stufe 1
	Unter Stufe 1

Volle Punktzahl

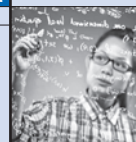
- C. 3 400

Keine Punkte

- Andere Antworten.
- Keine Antwort.

Kommentar

Die erste Frage geht über die persönliche Erlebniswelt des Wanderers hinaus und setzt sich mit allgemeineren sozialen Aspekten auseinander – in diesem konkreten Fall mit Bedenken über eine mögliche Überbeanspruchung eines öffentlichen Wanderwegs. In Aufgaben vom Typ Gesellschaftsbezogen geht es um Themen wie Wahlsysteme, öffentliche Verkehrsmittel, staatliche Verwaltung, Politik, Demografie, Werbung, nationale Statistiken und Volkswirtschaft. Selbst wenn sich Menschen auch persönlich mit solchen Themen auseinandersetzen, steht bei der Kontextkategorie Gesellschaftsbezogen doch eher die gesellschaftliche Perspektive im Vordergrund. Die Zuordnung zur Kontextkategorie dient lediglich der ausgewogenen Gestaltung der Erhebung und wird nicht für Berichtszwecke verwendet. Etwas anders formuliert, z.B. aus Sicht der Park Ranger in Bezug auf von ihnen getroffene Entscheidungen, hätte diese Testeinheit der Kategorie Berufsbezogen zugeordnet werden können.



Die erste Frage ist eine einfache Multiple-Choice-Aufgabe (es gilt eine von vier Antworten auszuwählen). Die richtige Antwort auf die zweite Frage lautet 11 Uhr; es handelt sich somit um eine Frage mit offenem Antwortformat, die von Experten kodiert werden muss, damit sichergestellt ist, dass die verschiedenen möglichen Schreibweisen dieser Zeitangabe berücksichtigt werden. Bei der dritten Frage müssen die Schüler die Zahl 40 angeben, um die volle Punktzahl zu erhalten; wenn sie 0,4 schreiben, die Schrittlänge also in Metern angeben, erhalten sie nur eine Teilpunktzahl. Auch diese Antwort muss von Experten kodiert werden.

Zur Lösung der ersten Frage muss ausgehend von den angegebenen Daten die Zahl der Tage berechnet werden, während denen der Wanderweg für die Öffentlichkeit geöffnet ist, und daraus ein Durchschnittswert errechnet werden. Diese Frage wurde der Inhaltskategorie Quantitatives Denken zugeordnet, weil sie die Quantifizierung einer Dauer und eines Durchschnitts beinhaltet. Hier muss zwar eine Formel zur Berechnung eines Durchschnitts angewandt werden, wobei es effektiv um die Darstellung eines Zusammenhangs geht, diese Formel dient jedoch zur Berechnung der durchschnittlichen Zahl der Besucher pro Tag, und der Schwerpunkt liegt somit nicht auf dem Zusammenhang selbst. Aus diesem Grund wurde die Aufgabe nicht der Kategorie Veränderung und funktionale Abhängigkeiten zugeordnet. Frage 3 hat ähnliche Merkmale und bezieht sich auf Längeneinheiten. Die richtige Antwort auf die erste Frage lautet C: 3400.

BERGSTEIGEN AM MOUNT FUJI – FRAGE 2

Der Gotemba-Wanderweg auf den Mount Fuji hinauf ist ungefähr 9 Kilometer (km) lang.

Die Wanderer müssen von der 18 km langen Wanderung bis 20:00 Uhr zurück sein.

Toshi schätzt, dass er den Berg mit durchschnittlich 1,5 Kilometern pro Stunde hinaufsteigen kann und mit der doppelten Geschwindigkeit absteigen kann. Diese Geschwindigkeiten berücksichtigen Essens- und Ruhepausen.

Wenn man Toshis geschätzte Geschwindigkeiten zu Grunde legt: Wann muss er seine Wanderung spätestens beginnen, damit er bis 20:00 Uhr zurück ist?.....

Bewertung

Beschreibung: Berechnung der Aufbruchszeit für eine Wanderung anhand von zwei unterschiedlichen Geschwindigkeiten, einer zurückzulegenden Gesamtstrecke und einer Rückkehrzeit

Mathematischer Inhaltsbereich: Veränderung und funktionale Abhängigkeiten

Kontext: Gesellschaftsbezogen

Prozess: Formulieren

Aufgabentyp: Aufgabe mit offenem Antwortformat (Kodierung durch Experten)

Schwierigkeitsgrad: 641,6

669	Stufe 6
607	Stufe 5
545	Stufe 4
482	Stufe 3
420	Stufe 2
358	Stufe 1
	Unter Stufe 1

Volle Punktzahl

11 Uhr [oder eine äquivalente Schreibweise, z.B. 11:00 Uhr]

Keine Punkte

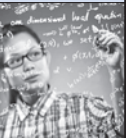
Andere Antworten.

Keine Antwort.

Kommentar

Die zweite Frage fällt unter die Kategorie Veränderung und funktionale Abhängigkeiten, weil es hier in erster Linie darum geht, den Zusammenhang zwischen Strecke und Zeit, ausgedrückt als Geschwindigkeit, zu ermitteln. Ausgehend von Angaben zu Strecke und Geschwindigkeit müssen die Dauer des Aufstiegs und die Dauer des Abstiegs ermittelt werden, die dann zusammengerechnet zur Zeit der Rückkehr in Bezug gesetzt werden müssen, um die Aufbruchszeit zu ermitteln. Wäre direkt angegeben worden, wie lange der Aufstieg und der Abstieg dauern, anstatt von den Schülern zu verlangen, dies anhand von Strecke und Geschwindigkeit selbst zu ermitteln, wäre diese Aufgabe der Kategorie Quantitatives Denken zuzuordnen gewesen. Da die PISA-Aufgaben einem realen Kontext entnommen sind, kommen in ihnen üblicherweise mehrere Mathematikinhalte und mathematische Phänomene zum Tragen, so dass entschieden werden muss, was bei den einzelnen Aufgaben jeweils die größte Anforderung darstellt, um die Items einer Kategorie zuzuordnen.

Bei der Zuordnung zur Prozesskategorie muss ebenfalls entschieden werden, was jeweils die größte Schwierigkeit bei den Items ist. Die erste Frage fällt unter die Kategorie Formulieren, da entschieden wurde, dass die größte Anforderung bei dieser relativ einfachen Aufgabe darin besteht, zwei Informationen aus der realen Lebenswelt (zur Saison, während der



der Wanderweg geöffnet ist, und zur Gesamtzahl der Besucher) in ein mathematisches Problem umzusetzen, das es zu lösen gilt: Die Gesamtzahl der Tage, an denen der Weg für die Öffentlichkeit geöffnet ist, muss anhand der angegebenen Daten ermittelt und mit der Angabe zur Gesamtzahl der Besucher verknüpft werden, um den Durchschnitt zu errechnen. Laut Ansicht der Experten besteht die Hauptschwierigkeit für 15-Jährige bei dieser Aufgabe darin, diese Situation aus der realen Lebenswelt in einen mathematischen Zusammenhang umzusetzen; dies dürfte für sie schwerer sein als die anschließende Rechnung mit ganzen Zahlen. Die zweite Frage wurde ebenfalls der Prozesskategorie Formulieren zugeordnet, da die größte Anforderung wiederum in der Überführung realer Daten in ein mathematisches Problem unter Identifizierung aller zum Tragen kommender Zusammenhänge besteht; die Errechnung und Interpretation der Aufbruchszeit 11 Uhr spielt eine weniger große Rolle. Bei diesem schwierigen Item setzt sich die mathematische Struktur aus mehreren funktionalen Abhängigkeiten zusammen: $\text{Aufbruchszeit} = \text{Rückkehrzeit} - \text{Dauer}$, $\text{Dauer} = \text{Aufstiegszeit} + \text{Abstiegszeit}$, $\text{Aufstiegszeit} = \text{Strecke} / \text{Geschwindigkeit}$ (oder gleichwertiger proportionaler Zusammenhang), $\text{Abstiegszeit} = \text{halbe Aufstiegszeit}$; darüber hinaus müssen die vereinfachenden Annahmen berücksichtigt werden, nämlich dass in den Durchschnittsgeschwindigkeiten bereits die Geschwindigkeitsschwankungen im Zeitverlauf herausgerechnet wurden und dass keine weitere Zeit für Pausen hinzugefügt werden muss.

BERGSTEIGEN AM MOUNT FUJI – FRAGE 3

Toshi trug einen Schrittzähler, um seine Schritte während der Wanderung auf dem Gotemba-Weg zu zählen.

Sein Schrittzähler zeigt an, dass er auf dem Weg nach oben 22.500 Schritte gemacht hat.

Schätze Toshis durchschnittliche Schrittlänge während seiner Wanderung auf dem 9 km langen Gotemba-Weg nach oben. Gib deine Antwort in Zentimetern (cm) an.

Antwort.....cm

Bewertung

Beschreibung: Division einer in Kilometern angegebenen Strecke durch eine bestimmte Zahl und Ausdrücken des Ergebnisses in cm

Mathematischer Inhaltsbereich: Quantitatives Denken

Kontext: Gesellschaftsbezogen

Prozess: Anwenden

Aufgabentyp: Aufgabe mit offenem Antwortformat (manuelle Kodierung)

Schwierigkeitsgrad: 610

669	Stufe 6
607	Stufe 5
545	Stufe 4
482	Stufe 3
420	Stufe 2
358	Stufe 1
	Unter Stufe 1

Volle Punktzahl

40

Teilpunktzahl

Antworten mit der Ziffer 4, die auf einer falschen Umrechnung in Zentimeter beruhen.

- 0,4 [Antwort in Metern angegeben]
- 4 000 [falsche Umrechnung]

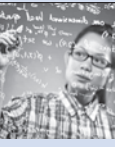
Keine Punkte

Andere Antworten.

Keine Antwort.

Kommentar

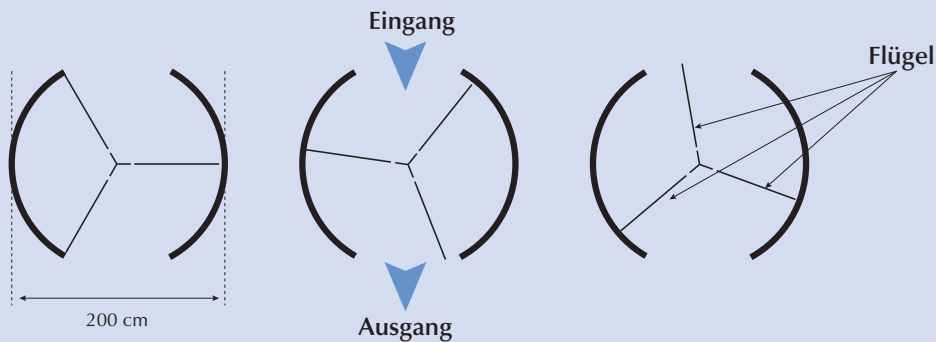
Die dritte Frage wurde der Kategorie Anwenden zugeordnet. Bei ihr muss der Blick auf eine funktionale Abhängigkeit gerichtet werden: zurückgelegte Strecke = Zahl der Schritte x durchschnittliche Schrittlänge. Bei der Nutzung dieses Zusammenhangs zur Lösung der Aufgabe müssen zwei Hindernisse überwunden werden: Erstens muss die Formel umgestellt werden (was die Schüler vermutlich nicht formal, indem sie den Zusammenhang schriftlich formulieren, sondern informell erledigen), damit anhand der Strecke und der Zahl der Schritte die durchschnittliche Schrittlänge ermittelt werden kann, zweitens müssen die Maßeinheiten umgerechnet werden. Bei dieser Frage liegt die Hauptschwierigkeit in der Durchführung dieser Schritte – weshalb sie der Inhaltskategorie Anwenden zugeordnet wurde – und weniger in der Identifizierung der Zusammenhänge und der anzustellenden Hypothesen (d.h. im Formulieren) bzw. im Umsetzen der Lösung in den realen Kontext (d.h. im Interpretieren).



■ Abbildung I.2.57 ■

DREHTÜR
DREHTÜR

Eine Drehtür hat drei Flügel, die sich innerhalb eines kreisförmigen Raumes drehen. Der Innendurchmesser dieses Raumes beträgt 2 Meter (200 Zentimeter). Die drei Türflügel teilen den Raum in drei gleichgroße Sektoren. Der Plan unten zeigt die Türflügel von oben gesehen in drei verschiedenen Positionen.



Das Stimulusmaterial für diese drei Aufgaben betrifft eine Drehtür, wie sie in kalten und warmen Ländern üblich ist, um zu verhindern, dass Wärme in Gebäude eindringt bzw. aus ihnen entweicht.

DREHTÜR – FRAGE 1

Wie groß ist der Winkel (in Grad), der von zwei Türflügeln gebildet wird?

Größe des Winkels:°

Bewertung

Beschreibung: Berechnung des Zentriwinkels eines Kreissektors

Mathematischer Inhaltsbereich: Raum und Form

Kontext: Wissenschaftsbezogen

Prozess: Anwenden

Aufgabentyp: Aufgabe mit offenem Antwortformat (manuelle Kodierung)

Schwierigkeitsgrad: 512,3 ■

669	Stufe 6
607	Stufe 5
545	Stufe 4
482	Stufe 3
420	Stufe 2
358	Stufe 1
	Unter Stufe 1

Volle Punktzahl

120 [die Angabe des entsprechenden überstumpfen Winkels – 240 – wird ebenfalls akzeptiert].

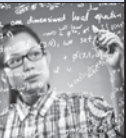
Keine Punkte

Andere Antworten.

Keine Antwort.

Kommentar

Die erste Aufgabe mag auf den ersten Blick sehr einfach erscheinen: Die Schüler müssen erfassen, dass der Winkel zwischen 2 Türflügeln 120° beträgt. Die Antworten der Schülerinnen und Schüler lassen allerdings darauf schließen, dass es sich um eine Frage auf Kompetenzstufe 3 handelt. Zurückzuführen ist dies wahrscheinlich auf die Anforderungen in Bezug auf das Kommunizieren, Repräsentieren und Mathematisieren sowie das erforderliche spezifische Fachwissen im Bereich der Kreisgeometrie. Der Kontext dreidimensionaler Drehtüren muss anhand der schriftlichen Beschreibungen verstanden werden. Ferner muss verstanden werden, dass die drei Diagramme im Stimulusmaterial am Aufgabenanfang unterschiedliche zweidimensionale Informationen über eine einzige Drehtür (und nicht über drei Türen) liefern – erstens zum Durchmesser, zweitens zur Richtung, in der die Tür betreten und verlassen wird, und drittens zu den Geraden, die im Diagramm den drei im Text beschriebenen Flügeln entsprechen. Um diese Diagramme mathematisch interpretieren



zu können, ist die grundlegende mathematische Fähigkeit des Repräsentierens sehr wichtig. Diese Aufgabe wurde der Inhaltskategorie Raum und Form zugeordnet, da die Schülerinnen und Schüler zur Beantwortung dieser Aufgabe wissen müssen, dass eine komplette Umdrehung 360° entspricht, und da räumliches Verständnis erforderlich ist, um die Diagramme zu interpretieren.

Diese Diagramme sind schematische Ansichten von oben, die Schülerinnen und Schüler müssen sich jedoch, insbesondere für die Beantwortung der zweiten und der dritten Frage, auch reale Drehtüren bildlich vorstellen.

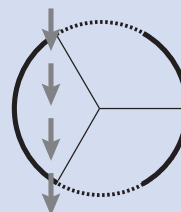
DREHTÜR – FRAGE 2

Die zwei Öffnungen der Drehtür (in der Abbildung als gepunktete Bögen dargestellt) sind gleich groß. Sind diese Öffnungen zu groß, können die Türflügel keinen abgeschlossenen Raum bilden, und zwischen dem Eingang und dem Ausgang könnte ein Luftzug entstehen, durch den unerwünscht Wärme entweichen oder eindringen kann. Dies ist in der nebenstehenden Abbildung dargestellt.

Was ist die maximale Bogenlänge (in cm), die jede Türöffnung haben kann, damit kein Luftzug zwischen Eingang und Ausgang entstehen kann?

Maximale Bogenlänge: cm

Möglicher Luftzug
in dieser Position



Bewertung

Beschreibung: Interpretation eines geometrischen Modells einer realen Situation zur Berechnung der Länge eines Bogens

Mathematischer Inhaltsbereich: Raum und Form

Kontext: Wissenschaftsbezogen

Prozess: Formulieren

Aufgabentyp: Aufgabe mit offenem Antwortformat (Kodierung durch Experten)

Schwierigkeitsgrad: 840,3

669	Stufe 6
607	Stufe 5
545	Stufe 4
482	Stufe 3
420	Stufe 2
358	Stufe 1
	Unter Stufe 1

Volle Punktzahl

Antworten zwischen 103 und 105. [Akzeptiert werden Antworten, bei denen $\frac{1}{6}$ des Kreisumfangs berechnet wurde ($\frac{100\pi}{3}$). Ebenfalls akzeptiert wird die Antwort 100, aber nur dann, wenn klar ist, dass diese Antwort auf der Gleichung $\pi = 3$ beruht. Die Antwort 100 ohne begleitende Berechnungen könnte auch einfach dadurch zustande gekommen sein, dass geraten wurde, dass die Bogenlänge dem Radius (Länge eines einzigen Flügels) entspricht.]

Keine Punkte

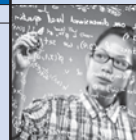
Andere Antworten.

- 209 [Entspricht der Gesamtlänge der Öffnungen anstatt der Größe einzelnen Türöffnungen].

Keine Antwort.

Kommentar

Die zweite Frage gehörte zu den schwierigsten Aufgaben der Erhebung und liegt im oberen Bereich von Kompetenzstufe 6. In ihr geht es um den Hauptzweck einer Drehtür, der darin besteht, eine Luftschleuse zwischen dem Gebäudeinneren und der Außenwelt zu schaffen. Zur Lösung der Aufgabe ist umfangreiches geometrisches Denken erforderlich, weshalb sie der Inhaltskategorie Raum und Form zuzuordnen ist. Auf Grund der Komplexität der Kodierung einer solchen mehrstufigen Antwort in einer großen Zahl von Ländern wurde dieses Item entweder nur mit der vollen Punktzahl oder nur mit null Punkten bewertet. Für die volle Punktzahl muss von komplexem geometrischem Denken Gebrauch gemacht werden, um aufzuzeigen, dass die maximal mögliche Türöffnung einem Sechstel des Kreisumfangs entspricht, was dann korrekt in Zentimeter umgerechnet werden muss. Das Item wurde in die Prozesskategorie Formulieren eingestuft und beruht in hohem Maße auf der grundlegenden mathematischen Fähigkeit des Mathematisierens, da die reale Situation sorgfältig analysiert werden muss und diese Analyse geometrisch formuliert und an zahlreichen Punkten wieder auf die Kontextsituation der Drehtür rückbezogen werden muss. Wie das Diagramm in der Aufgabenstellung zeigt, strömt Luft



von außen nach innen oder umgekehrt, wenn die Wand zwischen der Öffnung vorne und hinten kürzer ist als der einen Drehtürbereich begrenzende Abschnitt des Kreisumfangs. Da jeder Sektor durch ein Drittel des Kreisumfangs begrenzt wird und es zwei Wände gibt, müssen beide Wände zusammen mindestens zwei Drittel des Kreisumfangs abschließen, so dass höchstens ein Drittel für die Öffnungen zur Verfügung steht. Ausgehend von der Symmetrie zwischen Vorder- und Rückseite kann jede Öffnung nicht größer als ein Sechstel des Kreisumfangs sein. Weitere geometrische Denkschritte sind erforderlich, um zu prüfen, ob die Luftschleuse tatsächlich erhalten bleibt, wenn diese Öffnungslänge gewählt wird. Diese Aufgabe beruht daher in sehr hohem Maße auf der grundlegenden mathematischen Fähigkeit des Reflektierens und Argumentierens.

DREHTÜR – FRAGE 3

Die Tür macht 4 vollständige Umdrehungen pro Minute. In jedem der drei Türsektoren ist Platz für maximal zwei Personen.

Wie viele Personen höchstens können in 30 Minuten das Gebäude durch die Tür betreten?

- A. 60
- B. 180
- C. 240
- D. 720

Bewertung

Beschreibung: Identifizieren von Informationen und Konstruktion eines (impliziten) quantitativen Modells, um das Problem zu lösen

Mathematischer Inhaltsbereich: Quantitatives Denken

Kontext: Wissenschaftsbezogen

Prozess: Formulieren

Aufgabentyp: Einfache Multiple-Choice-Aufgabe

Schwierigkeitsgrad: 561,3

669	Stufe 6
607	Stufe 5
545	Stufe 4
482	Stufe 3
420	Stufe 2
358	Stufe 1
	Unter Stufe 1

Volle Punktzahl

- D. 720

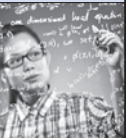
Keine Punkte

- Andere Antworten.
- Keine Antwort.

Kommentar

Bei der dritten Frage stellt sich den Schülern eine andere Herausforderung, in ihr geht es um Verhältnisse und proportionales Denken, und sie ist auf Stufe 4 der Gesamtskala Mathematik angesiedelt. Die Tür macht 4 vollständige Umdrehungen pro Minute, so dass sich $4 \times 3 = 12$ Türsektoren öffnen, durch die $12 \times 2 = 24$ Personen das Gebäude betreten können. In 30 Minuten können somit $24 \times 30 = 720$ Personen das Gebäude betreten (so dass die richtige Antwort die Antwort D ist). Auf Grund der Art und Weise, wie mehrere relevante Mengenangaben (Zahl der Personen pro Sektor [2], Zahl der Sektoren pro Umdrehung [3], Zahl der Umdrehungen pro Minute [4], Zahl der Minuten [30]) durch Zahlenoperationen miteinander kombiniert werden müssen, um die gesuchte Zahl der Personen zu ermitteln, die das Gebäude in 30 Minuten betreten können, wurde diese Aufgabe der Inhaltskategorie Quantitatives Denken zugeordnet. Der hohe Anteil der PISA-Items, bei denen proportionales Denken gefragt ist, macht deutlich, dass diese Kompetenz in der mathematischen Grundbildung eine zentrale Rolle spielt, insbesondere bei Schülerinnen und Schülern, deren Kenntnisse in Mathematik das für 15-Jährige typische Niveau erreicht haben. In zahlreichen realen Kontextsituationen geht es direkt um Proportionen und Verhältnisangaben, die – wie in diesem Fall – oftmals in Argumentationsketten eingesetzt werden. Voraussetzung für die Koordination einer derartigen Argumentationskette ist die grundlegende mathematische Fähigkeit des Entwickelns von Strategien, um Informationen in einer logischen Folge zusammenzufügen.

Ebenfalls sehr wichtig bei diesem Item ist die grundlegende mathematische Fähigkeit des Mathematisierens, insbesondere in der Prozesskategorie Formulieren. Die Schüler müssen die reale Situation verstehen und sich dabei vielleicht visuell vorstellen, wie sich die Türflügel drehen, so dass immer nur ein Sektor nach außen geöffnet ist, was jeweils die einzige Möglichkeit ist, um das Gebäude zu betreten. Dieses Verständnis der Situation in der realen Lebenswelt befähigt die Schüler, die in der Aufgabenstellung enthaltenen Informationen richtig zusammenzufügen.



Allgemeiner Kommentar zu dieser Testeinheit

Die Fragen in dieser Einheit wurden der Kontextkategorie Wissenschaftsbezogen zugeordnet, obgleich sie nicht ausdrücklich wissenschaftliche oder ingenieurwissenschaftliche Konzepte beinhalten wie zahlreiche andere Items in dieser Kategorie. Die Kategorie Wissenschaftsbezogen umfasst Items, die erklären, warum Dinge in der realen Welt sind, wie sie sind. Die zweite Frage ist ein gutes Beispiel für ein solches im Wesentlichen wissenschaftsbezogenes Unterfangen. Es wird kein formaler geometrischer Beweis verlangt; indem sie die Aufgabe richtig lösen, erbringen besonders leistungsstarke Schülerinnen und Schüler jedoch fast einen solchen Beweis.

■ Abbildung I.2.58 ■

WELCHES AUTO?

WELCHES AUTO?

Christina hat gerade ihren Führerschein gemacht und möchte sich ihr erstes Auto kaufen.

Die Tabelle unten zeigt die Einzelheiten für vier Autos, die sie bei einem örtlichen Autohändler findet.

Modell:	Azuro	Barry	Cort	Delta
Baujahr	2003	2000	2001	1999
Angebotener Preis (Zeds)	4 800	4 450	4 250	3 990
Kilometerstand (Kilometer)	105 000	115 000	128 000	109 000
Hubraum (Liter)	1.79	1.796	1.82	1.783

WELCHES AUTO? – FRAGE 1

Christina möchte ein Auto, das alle diese Bedingungen erfüllt:

- Der Kilometerstand ist nicht höher als 120.000 Kilometer.
- Es wurde im Jahr 2000 oder später gebaut.
- Der angebotene Preis ist nicht höher als 4500 Zeds.

Welches Auto erfüllt Christinas Bedingungen?

- A. Azuro
- B. Barry
- C. Cort
- D. Delta

Bewertung

Beschreibung: Auswahl eines Werts, der vier zahlenbezogenen Bedingungen/Aussagen in einem finanziellen Kontext gerecht wird.

Mathematischer Inhaltsbereich: Wahrscheinlichkeit und Statistik

Kontext: Persönlich

Prozess: Interpretieren

Aufgabentyp: Einfache Multiple-Choice-Aufgabe

Schwierigkeitsgrad: 327,8

669	Stufe 6
607	Stufe 5
545	Stufe 4
482	Stufe 3
420	Stufe 2
358	Stufe 1
	Unter Stufe 1

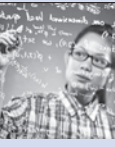
Volle Punktzahl

B. Barry.

Keine Punkte

Andere Antworten.

Keine Antwort.



WELCHES AUTO? – FRAGE 2

Welches Auto hat den kleinsten Hubraum?

- A. Azuro
- B. Barry
- C. Cort
- D. Delta

Bewertung

Beschreibung: Auswahl der niedrigsten Dezimalzahl unter vier angegebenen Zahlen im Kontext.

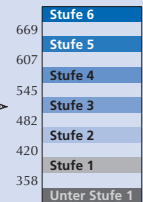
Mathematischer Inhaltsbereich: Quantitatives Denken

Kontext: Persönlich

Prozess: Anwenden

Aufgabentyp: Einfache Multiple-Choice-Aufgabe

Schwierigkeitsgrad: 490,9



Volle Punktzahl

- D. Delta.

Keine Punkte

- Andere Antworten.
- Keine Antwort.

WELCHES AUTO? – FRAGE 3

Christina muss zusätzlich 2,5 % des angebotenen Autopreises als Steuer zahlen.

Wie hoch ist die zusätzliche Steuer für den Azuro?

Zusätzliche Steuer in Zeds:

Bewertung

Beschreibung: Berechnung von 2,5% eines Werts in den Tausendern in einem finanziellen Kontext

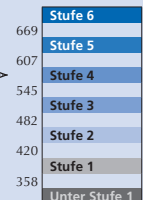
Mathematischer Inhaltsbereich: Quantitatives Denken

Kontext: Persönlich

Prozess: Anwenden

Aufgabentyp: Aufgabe mit offenem Antwortformat (manuelle Kodierung)

Schwierigkeitsgrad: 552,6



Volle Punktzahl

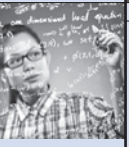
- 120

Keine Punkte

- Andere Antworten.
- 2,5% von 4 800 Zeds [Muss evaluiert werden].
- Keine Antwort.

Allgemeiner Kommentar zu dieser Testeinheit

Da der Kauf eines Autos eine Situation ist, mit der viele Menschen in ihrem Alltagsleben konfrontiert sein können, sind alle drei Fragen der Kontextkategorie *Persönlich* zugeordnet. Bei der ersten und der zweiten Frage handelt es sich um einfache Multiple-Choice-Aufgaben; die dritte Frage hat ein offenes Antwortformat, bei dem aber nur eine Zahl angegeben werden muss, so dass keine Kodierung durch Experten erforderlich ist. Die erste Frage ist der Kategorie *Wahrscheinlichkeit und Statistik* zugeordnet. Zur Beantwortung dieser Frage müssen die Schülerinnen und Schüler wissen, wie der Aufbau einer Tabelle in Spalten und Reihen funktioniert, und in der Lage sein, mehrere Daten gegeneinander abzuwägen, um zu entscheiden, welches Auto alle drei Bedingungen erfüllt. Um die richtige Lösung zu finden, müssen



die Schüler zwar grundlegende Kenntnisse über große ganze Zahlen besitzen, dies dürfte nach Ansicht der Experten aber nicht die Hauptschwierigkeit bei dieser Frage für 15-jährige Schüler sein. Die richtige Antwort lautet B: Barry.

Die zweite Frage ist hingegen der Inhaltskategorie *Quantitatives Denken* zugeordnet, weil allgemein bekannt ist, dass viele Schüler auch noch im Alter von 15 Jahren das Dezimalsystem und die Bedeutung der Stellenwerte nicht richtig verstanden haben, was notwendig ist, um „krumme“ Dezimalzahlen richtig einzuordnen. Hier wurden Punkte für Antwort D: Delta vergeben.

Die dritte Frage ist ebenfalls der Kategorie *Quantitatives Denken* zugeordnet, weil die Berechnung von 2,5% des angegebenen Preises, 120 Zeds, deutlich größere kognitive Anforderungen an die Schüler stellen dürfte als die Identifizierung der richtigen Daten in der Tabelle. Welche Schwierigkeiten 15-jährige Schülerinnen und Schüler mit Dezimalzahlen und Prozentsätzen haben, drückt sich auch in den empirischen Ergebnissen aus: Die erste Frage ist als einfach zu betrachten, die zweite entspricht etwa dem internationalen Durchschnittsniveau, und der Schwierigkeitsgrad der dritten Frage liegt über dem Durchschnitt.

Um diese Items Prozesskategorien zuzuordnen, muss geprüft werden, wie sich der Bezug zur Realsituation gestaltet. Bei Items in der Kategorie *Formulieren* besteht die Hauptanforderung darin, ein reales Problem in ein mathematisches Problem umzusetzen. Bei Items in der Kategorie *Anwenden* liegt die Hauptanforderung in der Welt der Mathematik. Bei Items in der Kategorie *Interpretieren* besteht die Hauptanforderung darin, mathematische Informationen zu nutzen, um eine Lösung für ein reales Problem zu finden. Die zweite und dritte Frage fallen unter die Kategorie *Anwenden*. Dies liegt daran, dass bei beiden Items die größte kognitive Anstrengung auf mathematische Operationen verwendet werden muss: Auswerten von Dezimalzahlen und Prozentrechnen. Die erste Frage enthält eine Datentabelle, deren Zusammenstellung (mit der Identifizierung der entscheidenden Variablen usw.) der Mathematisierung einer realen Situation entspricht. Zur Lösung der Aufgabe müssen die mathematischen Konzepte dann in Bezug zu realen Sachzwängen und der Situation interpretiert werden, die sie darstellen.

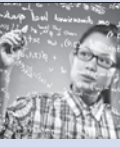
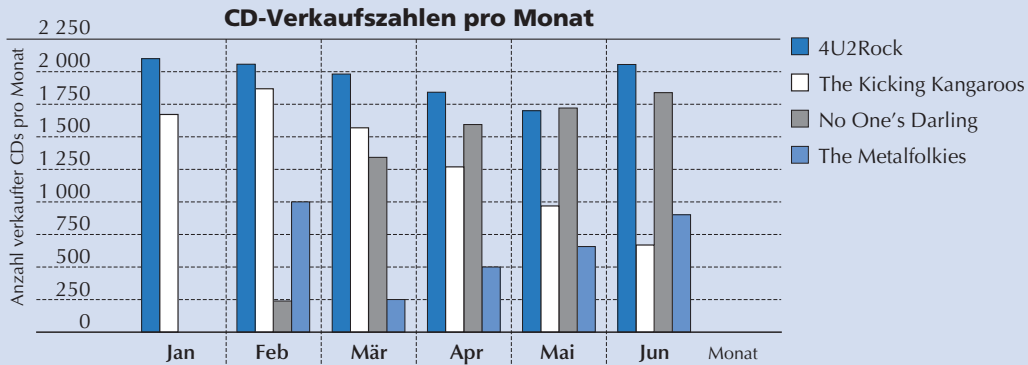


Abbildung I.2.59 ■

CHARTS

Im Januar kamen die neuen CDs der Bands 4U2Rock und The Kicking Kangaroos heraus. Im Februar folgten die CDs der Bands No One's Darling und The Metalfolkies. Das folgende Diagramm zeigt die CD-Verkaufszahlen der Bands von Januar bis Juni.



Die drei Aufgaben, die die Testeinheit CHARTS bilden, liegen alle unter dem durchschnittlichen Schwierigkeitsniveau der Haupterhebung. Alle drei Items sind einfache Multiple-Choice-Aufgaben, so dass es bei den Anforderungen an die Fähigkeit des Kommunizierens lediglich um die Rezeption geht. In der Unit ist ein Säulendiagramm dargestellt, das Umsatzzahlen in der Musikbranche für sechs Monate darstellt. Die Schwierigkeit bei diesem Säulendiagramm besteht darin, dass es vier separate Datensätze (für vier verschiedene Musikgruppen) zeigt. Die Schülerinnen und Schüler müssen Werte aus der grafischen Darstellung der Daten ablesen und Schlüsse daraus ziehen. Dies ist ein recht üblicher Aufgabentyp in der Inhaltskategorie *Wahrscheinlichkeit und Statistik*. Alle drei Items wurden in die Kontextkategorie *Gesellschaftsbezogen* eingestuft, da sie Informationen über ein Gruppenverhalten bieten, in diesem Fall in Bezug auf den Kauf von Musikprodukten

CHARTS – FRAGE 1

Wie viele CDs hat die Band *The Metalfolkies* im April verkauft?

- A. 250
- B. 500
- C. 1 000
- D. 1 270

Bewertung

Beschreibung: Lesen eines Säulendiagramms

Mathematischer Inhaltsbereich: Wahrscheinlichkeit und Statistik

Kontext: Gesellschaftsbezogen

Prozess: Interpretieren

Aufgabentyp: Einfache Multiple-Choice-Aufgabe

Schwierigkeitsgrad: 347,7 ■

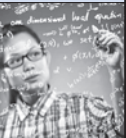
669	Stufe 6
607	Stufe 5
545	Stufe 4
482	Stufe 3
420	Stufe 2
358	Stufe 1
	Unter Stufe 1

Volle Punktzahl

- B. 500

Keine Punkte

- Andere Antworten.
- Keine Antwort.



Kommentar

Die erste Frage mit einem Schwierigkeitsgrad von 347,7 entspricht einer Aufgabe unter Stufe 1 auf der Gesamtskala Mathematik und ist eine der einfachsten Aufgaben des Item-Pools in PISA 2012. Von den Schülerinnen und Schülern wird verlangt, im dargestellten Säulendiagramm die Säulen für den Monat April zu finden, die richtige Säule für The Metalfolkies auszuwählen und die Höhe der Säule abzulesen, um die richtige Antwort B zu erhalten (500). Es werden keine Skalenauswertungen und keine Interpolationen verlangt. Diese Frage wird der Prozesskategorie Interpretieren zugeordnet.

CHARTS – FRAGE 2

In welchem Monat verkaufte die Band *No One's Darling* zum ersten Mal mehr CDs als die Band *The Kicking Kangaroos*?

- A. In keinem Monat
- B. März
- C. April
- D. Mai

Bewertung

Beschreibung: Lesen eines Säulendiagramms und Vergleich der Höhe zweier Säulen

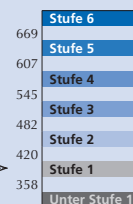
Mathematischer Inhaltsbereich: Wahrscheinlichkeit und Statistik

Kontext: Gesellschaftsbezogen

Prozess: Interpretieren

Aufgabentyp: Einfache Multiple-Choice-Aufgabe

Schwierigkeitsgrad: 415



Volle Punktzahl

- C. April.

Keine Punkte

- Andere Antworten.
- Keine Antwort.

Kommentar

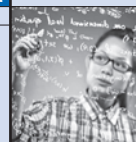
Die zweite Frage ist etwas schwieriger und liegt auf der Kompetenzskala am unteren Ende von Stufe 3. Die Säulen, die für die beiden Musikgruppen stehen, müssen identifiziert und ihre Höhen miteinander verglichen werden, und zwar ab Januar bis in den weiteren Jahresverlauf. Die Werte der vertikalen Achse müssen dazu nicht beachtet werden. Es ist lediglich erforderlich, visuelle Vergleiche der nebeneinander liegenden Säulen nach einem sehr einfachen Kriterium – welche ist höher? – anzustellen und die richtige Antwort C (April) zu identifizieren. Verglichen mit der ersten Aufgabe ist die zweite Frage etwas anspruchsvoller in Bezug auf die Fähigkeiten des Kommunizierens (Rezeption), des Repräsentierens sowie des Entwickelns von Strategien zur Lösung von Problemen und ähnlich anspruchsvoll in Bezug auf die anderen grundlegenden mathematischen Fähigkeiten. Diese Frage wird ebenfalls der Prozesskategorie Interpretieren zugeordnet.

CHARTS – FRAGE 3

Der Manager von *The Kicking Kangaroos* macht sich Sorgen, weil die Anzahl der verkauften CDs von Februar bis Juni gesunken ist.

Wie hoch ist die geschätzte Verkaufszahl für Juli, falls sich dieser negative Trend genauso fortsetzt?

- A. 70 CDs
- B. 370 CDs
- C. 670 CDs
- D. 1 340 CDs



Bewertung

Beschreibung: Interpretieren eines Säulendiagramms und Schätzung zukünftiger Umsatzzahlen unter der Annahme, dass sich der lineare Trend fortsetzt

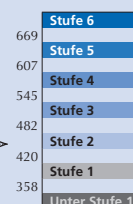
Mathematischer Inhaltsbereich: Wahrscheinlichkeit und Statistik

Kontext: Gesellschaftsbezogen

Prozess: Anwenden

Aufgabentyp: Einfache Multiple-Choice-Aufgabe

Schwierigkeitsgrad: 428,2 ■



Volle Punktzahl

B. 370 CDs.

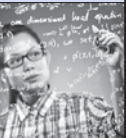
Keine Punkte

Andere Antworten.

Keine Antwort.

Kommentar

Zur Lösung von Frage 5 muss die Datenreihe für die Musikgruppe The Kicking Kangaroos identifiziert und der in der Einführung des Aufgabenstimulus erwähnte negative Trend beobachtet werden. Hierfür muss in gewissem Umfang mit Zahlen gearbeitet und erkannt werden, dass die richtige Antwort möglicherweise ein Näherungswert eines Berechnungsergebnisses ist. Es gibt mehrere Möglichkeiten, um den Trend um einen Monat zu verlängern. Die Schülerinnen und Schüler können z.B. jeden Monatsrückgang ermitteln und den Durchschnittswert berechnen, was umfangreiche Berechnungen erfordert. Sie können auch ein Fünftel des Gesamtrückgangs von Februar bis Juni errechnen. Oder sie könnten ein Lineal an die oberen Enden der Säulen für die Kangaroos anlegen und daran ablesen, dass die Säule für Juli einen Wert zwischen 250 und 500 zeigen dürfte. Die richtige Antwort ist B (370 CDs), und die Aufgabe ist auf Stufe 2 der Gesamtskala Mathematik angesiedelt. Das Item wurde der Prozesskategorie Anwenden zugeordnet, da davon ausgegangen wurde, dass die meisten Schülerinnen und Schüler auf dieser Stufe die Aufgabe über Berechnungen lösen und dass deren korrekte Ausführung die größte Schwierigkeit bei dieser Aufgabe darstellen dürfte.



■ Abbildung I.2.60 ■

GARAGE

Die Modellreihe „Basis“ eines Garagenherstellers umfasst Modelle mit nur einem Fenster und einem Tor. Georg wählt aus der Modellreihe „Basis“ das folgende Modell aus. Die Positionen von Fenster und Tor sind hier dargestellt.



Die Unit GARAGE besteht aus zwei Fragen, die beide der Inhaltskategorie *Raum und Form* zugeordnet sind, da es bei ihnen um räumliche Visualisierungen und das Lesen von Bauplänen geht, und die unter die Kontextkategorie Berufsbezogen fallen, da sich solche Fragen beim Bau, beim Streichen oder bei sonstigen Arbeiten an einem Gebäude stellen können. Weil aus den Diagrammen mathematische Informationen abgeleitet werden müssen, muss bei beiden Fragen von der grundlegenden mathematischen Fähigkeit des *Repräsentierens* Gebrauch gemacht werden.

GARAGE – FRAGE 1

Die Abbildungen unten zeigen unterschiedliche „Basis“-Modelle von der Rückseite aus gesehen. Nur eine dieser Abbildungen passt zu dem Modell oben, das Georg gewählt hat.

Welches Modell hat Georg gewählt? Kreise A, B, C oder D ein.

A**B****C****D****Bewertung**

Beschreibung: Räumliches Denken einsetzen, um die dreidimensionale Ansicht zu identifizieren, die einer anderen dreidimensionalen Ansicht entspricht

Mathematischer Inhaltsbereich: Raum und Form

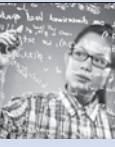
Kontext: Berufsbezogen

Prozess: Interpretieren

Aufgabentyp: Einfache Multiple-Choice-Aufgabe

Schwierigkeitsgrad: 419,6

669	Stufe 6
607	Stufe 5
545	Stufe 4
482	Stufe 3
420	Stufe 2
358	Stufe 1
	Unter Stufe 1



Volle Punktzahl

C. [Grafik C].

Keine Punkte

Andere Antworten.

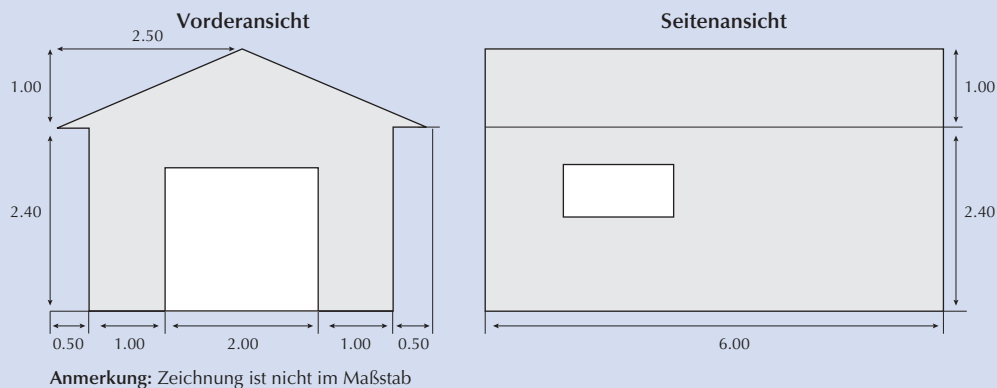
Keine Antwort.

Kommentar

Die erste Frage liegt sehr nahe an der Grenze zwischen Stufe 1 und Stufe 2 auf der Kompetenzskala. Die Schülerinnen und Schüler sollen die Darstellung der Rückseite eines Gebäudes identifizieren, die dem Gebäudemodell entspricht, das ihnen zuvor von vorne gezeigt wurde. Die Abbildungen müssen anhand der realen Position „von der Rückseite“ aus interpretiert werden, weshalb diese Frage der Prozesskategorie Interpretieren zugeordnet wird. Die richtige Antwort lautet C. Mentale Rotationsaufgaben wie diese werden von einigen Personen intuitiv durch räumliche Visualisierung gelöst. Andere wiederum müssen explizite Denkprozesse vollziehen. Sie analysieren möglicherweise die relative Position mehrerer Elemente (Tür, Fenster, nächstgelegene Ecke) und eliminieren so eine Multiple-Choice-Option nach der anderen. Wieder andere erstellen möglicherweise eine Zeichnung aus der Vogelperspektive und drehen diese dann. Das ist nur ein Beispiel dafür, dass verschiedene Schüler u.U. recht unterschiedliche Methoden zur Lösung derselben PISA-Aufgaben nutzen; in diesem Fall vollziehen einige Schülerinnen und Schüler explizite Denkprozesse, während andere intuitiv vorgehen.

GARAGE – FRAGE 2

Die beiden Pläne unten zeigen die Abmessungen der Garage (in Meter), die Georg ausgewählt hat.



Das Dach besteht aus zwei identischen Rechtecken.

Berechne die Gesamtfläche des Daches. Gib deinen Lösungsweg an.

Bewertung

Beschreibung: Interpretieren eines Plans und Berechnung der Fläche eines Rechtecks anhand des Satzes des Pythagoras oder von Messungen

Mathematischer Inhaltsbereich: Raum und Form

Kontext: Berufsbezogen

Prozess: Anwenden

Aufgabentyp: Aufgabe mit offenem Antwortformat (Kodierung durch Experten)

Schwierigkeitsgrad: 687,3

669	Stufe 6
607	Stufe 5
545	Stufe 4
482	Stufe 3
420	Stufe 2
358	Stufe 1
	Unter Stufe 1

Volle Punktzahl

Beliebiger Wert zwischen 31 und 33, entweder ohne jegliche Berechnung oder anhand von Berechnungen, die die Anwendung des Satzes des Pythagoras zeigen (oder die Elemente umfassen, die darauf schließen lassen, dass diese Methode verwendet wurde) [Einheiten (m²) nicht erforderlich].

- $12\sqrt{7,25} \text{ m}^2$
- $12 \times 2,69 = 32,28 \text{ m}^2$
- $32,4 \text{ m}^2$

Teilpunktzahl

Die Berechnungen machen deutlich, dass der Satz des Pythagoras richtig angewandt wurde, dass jedoch ein Rechenfehler gemacht wurde, falsche Längen verwendet wurden oder die Dachfläche nicht verdoppelt wurde.

- $2,5^2 + 1^2 = 6$, $12 \times \sqrt{6} = 29,39$ [korrekte Anwendung des Satzes des Pythagoras mit Rechenfehler]
- $2^2 + 1^2 = 5$, $2 \times 6 \times \sqrt{5} = 26,8 \text{ m}^2$ [falsche Länge verwendet].
- $6 \times 2,6 = 15,6$ [Dachfläche wurde nicht verdoppelt].

Die Berechnungen zeigen keine Verwendung des Satzes des Pythagoras, wurden jedoch unter Zugrundelegung sinnvoller Werte für die Dachbreite (d.h. einen beliebigen Wert von 2,6 bis 3) korrekt durchgeführt.

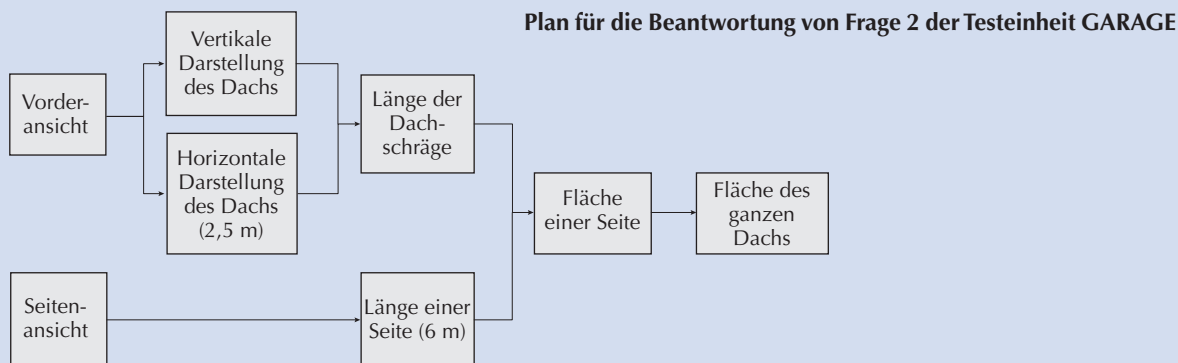
- $2,75 \times 12 = 33$
- $3 \times 6 \times 2 = 36$
- $12 \times 2,6 = 31,2$

Keine Punkte

Andere Antworten.

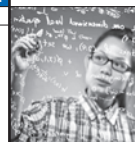
- $2,5 \times 12 = 30$ [Schätzung der Dachbreite außerhalb der akzeptablen Bandbreite von 2,6 bis 3].
- $3,5 \times 6 \times 2 = 42$ [Schätzung der Dachbreite außerhalb der akzeptablen Bandbreite von 2,6 bis 3].

Keine Antwort.



Kommentar

Frage 2 erfordert eine komplizierte Berechnung, bei der mehrfach auf das mathematische Diagramm zurückgegriffen werden muss und es notwendig ist, den Satz des Pythagoras anwenden zu können. Deshalb wurde die Aufgabe der Prozesskategorie Anwenden zugeordnet. Es gibt mehrere Gründe dafür, dass dieses Item für die Teilpunktzahl Stufe 5 und für die volle Punktzahl Stufe 6 zugeordnet ist. Frage 2 ist eine Aufgabe mit offenem Antwortformat, auch wenn die Erläuterung der Denkschritte hier nur als Grundlage für die Vergabe der Teilpunktzahl für falsche Antworten dient; die Qualität der Erläuterung wurde nicht bewertet. Die Fähigkeit des Repräsentierens ist für das Verständnis und zur Ableitung genauer Informationen aus der dargestellten Vorder- und Seitenansicht sehr wichtig. Auch eine Mathematisierung ist nötig, insbesondere um die offenbare Höhe des Daches (1 m) aus der Seitenansicht mit der realen Situation und mit der Vorderansicht in Einklang zu bringen. Die Fähigkeit zum Entwickeln von Strategien zur Lösung von Problemen ist in hohem Maße erforderlich, um einen Plan zur Ableitung der Fläche aus den dargestellten Informationen zu entwickeln. Die obige Abbildung zeigt die Grundstruktur der Lösung. Die Umsetzung eines solchen Plans erfordert darüber hinaus sorgfältige Kontrollen. Künftige Analysen der Daten, die den Rahmen dieses ersten Berichts sprengen würden, könnten interessante Unterschiede zwischen Schülerinnen und Schülern zu Tage bringen, die die Teilpunktzahl erhalten haben.



Anmerkungen

1. Bei den BIP-Werten handelt es sich um das Pro-Kopf-BIP zu jeweiligen Preisen von 2012, das um Kaufkraftunterschiede zwischen den OECD-Ländern bereinigt ist.

2. Dabei muss jedoch berücksichtigt werden, dass die Anzahl der in den Vergleich einbezogenen Länder klein ist und die Trendgerade daher stark von den besonderen Merkmalen der einbezogenen Länder abhängt.

3. Die Ausgaben je Schüler werden näherungsweise errechnet, indem die öffentlichen und privaten Ausgaben für Bildungseinrichtungen je Schüler im Jahr 2012 auf jeder Bildungsstufe mit der theoretischen Dauer der Teilnahme an den jeweiligen Bildungsstufen bis zum Alter von 15 Jahren multipliziert werden. Die kumulativen Ausgaben eines gegebenen Landes werden wie folgt näherungsweise errechnet: Nimmt man $n(0)$, $n(1)$ und $n(2)$ für die Anzahl der Jahre, die ein Schüler zwischen 6 und 15 Jahren in der Regel in der Primarstufe, der Sekundarstufe I und der Sekundarstufe II verbringt, und $E(0)$, $E(1)$ und $E(2)$ für die jährlichen Ausgaben je Schüler in US-Dollar, umgerechnet auf der Basis von Kaufkraftparitäten, für die Primarstufe, die Sekundarstufe I und die Sekundarstufe II, dann lassen sich die kumulativen Ausgaben durch Multiplikation der jeweiligen Jahresausgaben E mit der Regeldauer n auf jeder Bildungsstufe i unter Verwendung der nachstehenden Formel berechnen:

$$CE = \sum_{i=0}^2 n(i) * E(i)$$

4. Zu diesem Zweck wurden zunächst die entsprechenden Daten im Ländervergleich standardisiert, um dann den Durchschnitt für die verschiedenen Aspekte zu berechnen.

5. Wegen näherer Einzelheiten vgl. Butler und Adams (2007).

6. Bei der Ermittlung der Leistungstrends werden Dubai (Vereinigte Arabische Emirate) und der übrige Teil der Vereinigten Arabischen Emirate wie getrennte Volkswirtschaften betrachtet. In Dubai (Vereinigte Arabische Emirate) wurde PISA 2009 im Jahr 2009 durchgeführt, der übrige Teil der Vereinigten Arabischen Emirate führte PISA 2009 im Jahr 2010 im Rahmen von PISA 2009+ durch.

7. Wie in Anhang A5 ausführlicher beschrieben, wird bei der Ermittlung der annualisierten Veränderung genau das Jahr berücksichtigt, in dem die Erhebung durchgeführt wurde. Im Fall der Mathematik ist dies für PISA 2009 besonders wichtig, da Costa Rica, Malaysia und die Vereinigten Arabischen Emirate (ohne Dubai) diese Erhebung 2010 im Rahmen von PISA 2009+ durchführten.

8. Bei einem Vergleich von zwei zum gleichen Zeitpunkt erhobenen Mittelwerten wird die Signifikanz ihrer Differenz in der Regel dadurch ermittelt, dass das Verhältnis der Differenz zwischen den Mittelwerten zum Standardfehler der Differenz zwischen den Mittelwerten berechnet wird. Ist der absolute Wert dieses Verhältnisses größer als 1,96, so liegt mit 95%iger Wahrscheinlichkeit eine echte Differenz vor. Beim Vergleich von zwei Mittelwerten, die – wie bei verschiedenen PISA-Runden – zu unterschiedlichen Zeitpunkten mit Instrumenten ermittelt wurden, die nur einen Unterkatalog gemeinsamer Items enthalten, wird ein zusätzlicher, auf Grund der begrenzten Anzahl gemeinsamer Items notwendiger Fehlerterm (Link-Fehler) einbezogen, so dass die sich daraus ergebende Aussage zur Signifikanz der Differenz vorsichtiger ist (wegen näherer Einzelheiten vgl. Anhang A5).

9. Durch Berücksichtigung von Geschlecht, Alter, sozioökonomischem Status, Migrationshintergrund und zu Hause gesprochener Sprache ermöglichen die bereinigten Trends einen Vergleich der Leistungstrends unter der Annahme, dass sich der durchschnittliche sozioökonomische Status, das Alter und der prozentuale Anteil der Mädchen, der Schüler mit Migrationshintergrund und der Schüler, die zu Hause eine andere Sprache sprechen als die Testsprache, in der betreffenden Population bzw. der effektiven Stichprobe nicht geändert haben.

10. Der *PISA-Index des wirtschaftlichen, sozialen und kulturellen Status* liegt für Albanien in PISA 2012 nicht vor. Zwar verbesserte Albanien seine Leistungen im Verlauf seiner Teilnahme an PISA-Erhebungen, doch lassen sich für dieses Land keine bereinigten Trends berechnen.

Literaturverzeichnis

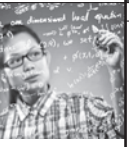
Bruns, B., D. Evans, und J. Luque (2011), *Achieving World-Class Education in Brazil*, Weltbank, Washington, D.C.

Butler, J. und R.J. Adams (2007), "The impact of differential investment of student effort on the outcomes of international studies", *Journal of Applied Measurement*, Vol. 3, No. 8, S. 279-304.

Gebhardt, E. und R.J. Adams (2007), "The influence of equating methodology on reported trends in PISA", *Journal of Applied Measurement*, Vol. 8, No. 3, S. 305-322.

INEP (Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira) (2000), *Sinopse Estatística da Educação Básica 2000*, INEP, Brasília.

INEP (Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira) (2012), *Sinopse Estatística da Educação Básica 2012*, INEP, Brasília.



INEP (Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira) (2013), *Censo da Educação Básica: 2012, Resumo Técnico*, INEP, Brasília.

OECD (erscheint demnächst), *PISA 2012 Technical Report*, OECD Publishing.

OECD (2013a), *OECD Skills Outlook 2013: First Results from the Survey of Adult Skills*, OECD Publishing, <http://dx.doi.org/10.1787/9789264204256-en>.

OECD (2013b), *The Survey of Adult Skills: Reader's Companion*, PISA, OECD Publishing, <http://dx.doi.org/10.1787/9789264204027-en>.

OECD (2013c), *PISA 2012 Assessment and Analytical Framework: Mathematics, Reading, Science, Problem Solving and Financial Literacy*, PISA, OECD Publishing, <http://dx.doi.org/10.1787/9789264190511-en>.

OECD (2013d), *Education Policy Outlook: Turkey*, OECD Publishing, http://www.oecd.org/edu/EDUCATION%20POLICY%20OUTLOOK%20TURKEY_EN.pdf.

OECD (2012), *Learning beyond Fifteen: Ten Years after PISA*, PISA, OECD Publishing, <http://dx.doi.org/10.1787/9789264172104-en>.

OECD (2011), *OECD Economic Surveys: Brazil*, OECD Publishing, http://dx.doi.org/10.1787/eco_surveys-bra-2011-en.

OECD (2010a), *Pathways to Success: How Knowledge and Skills at Age 15 Shape Future Lives in Canada*, PISA, OECD Publishing, <http://dx.doi.org/10.1787/9789264081925-en>.

OECD (2010b), *Lessons from PISA for the United States, Strong Performers, Successful Reformers in Education*, OECD Publishing, <http://dx.doi.org/10.1787/9789264096660-en>.

OECD (2007), *Reviews of National Policies for Education: Basic Education in Turkey*, OECD Publishing, <http://dx.doi.org/10.1787/9789264030206-en>.

OECD (2006), *Economic Survey of Turkey: 2006*, OECD Publishing, http://dx.doi.org/10.1787/eco_surveys-tur-2006-en.

OECD (2004), *Lernen für die Welt von morgen: Erste Ergebnisse von PISA 2003*, PISA, W. Bertelsmann Verlag, <http://dx.doi.org/10.1787/9783827416377-de>.

Talim ve Terbiye Kurulu (TTKB) (2008), *İlköğretim Matematik Dersi 6–8 Sınıflar Öğretim Programı ve Kılavuzu (Teaching Syllabus and Curriculum Guidebook for Elementary School Mathematics Course: Grades 6 to 8)*, Milli Eğitim Bakanlığı, Ankara.

Turner, R., J. Dossey, W. Blum und M. Niss (2013), "Using mathematical competencies to predict item difficulty in PISA", in M. Prenzel, M. Kobarg, K. Schops und S. Ronnebeck (Hrsg.), *Research on PISA: Research Outcomes of the PISA Research Conference 2009*, Dordrecht, Springer, S. 23-37.